第27卷 第3期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 3
2010年06月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0562-05

Ekeland变分原理导出的向量均衡系统解的存在性*

成 波[1,2], 刘三阳[1]

(1- 西安电子科技大学理学院，西安 710071; 2- 安康学院数学系，安康 725000)

摘 要: 本文研究了定义在度量空间上的向量均衡系统解的存在性问题。利用非线性标量化方法，将向量优化问题转化为数量优化问题，得到了Ekeland变分原理的一个向量形式推广。用向量形式Ekeland变分原理，证明了向量均衡系统解的存在性定理。结果表明，如果函数满足向量形式Ekeland变分原理和上半连续性条件，那么向量均衡系统的解集非空。

关键词: 向量均衡; 向量均衡系统; Ekeland变分原理; 近似解

分类号: **AMS**(2000) 49J40 **中图分类号**: O221.2 **文献标识码**: A

1 引言与预备知识

自从引入均衡问题[1]以来，它受到了广泛地关注[1,2]，它不但与数学中很多重要问题(如数值优化问题、Nash均衡问题、变分不等式问题、互补问题等)有着密切的关系[3]，而且在经济、力学等许多领域的重要应用价值日益凸显。2000年，Ansari[4]引入并研究了向量均衡系统，利用它可以研究向量变分不等式系统、向量优化系统和向量均衡等诸多问题[4]。

著名的Ekeland变分原理及其推广形式[5,6]在优化理论、控制论和非线性分析等数学的许多领域有着重要的应用。最近，它被推广为向量形式Ekeland变分原理[5,6]，并利用这种向量形式Ekeland变分原理证明了均衡问题和向量均衡问题解的存在性。本文利用向量形式Ekeland变分原理研究了向量均衡系统问题，给出了完备度量空间上向量均衡系统解的存在性结果。

在完备度量空间中，非空闭集列有如下交集定理，它类似于数学分析中的闭区域套定理。

引理1[7] 设(X,d)为完备度量空间，$\{F_n\}\subset X$是一列非空闭集。若

1) $F_{n+1}\subset F_n$, $n=0,1,2,\cdots$;

2) $\mathrm{diam}F_n\to 0(n\to\infty)$，其中$\mathrm{diam}F_n=\sup_{x,y\in F_n}d(x,y)$是$F_n$的直径;

则存在惟一$x\in X$使得$\{x\}=\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n$。

设Y为Hausdorff拓扑向量空间，C是Y中的闭凸点锥且$\mathrm{int}C\neq\emptyset$($\mathrm{int}C$表示$C$的拓扑内部)，则锥$C$在$Y$中诱导出一个偏序关系[2]“$\le_C$”。设$e\in\mathrm{int}C$，由文献[8]定义的非线性标量化函数$\xi_e:Y\to\mathbb{R}$为$\xi_e(y)=\min\{t\in\mathbb{R}:y\in te-C\}$。它具有次可加性、连续性、凸性和严格递增性[9]，且$\xi_e(e)=1$, $\xi_e(-e)=-1$。

设$I=\{1,2,\cdots,m\}$为指标集，对每个$i\in I$, (X_i,d_i)为完备度量空间。若$X=\prod_{i\in I}X_i$，而$d(x,y)=\max_{i\in I}\{d_i(x_i,y_i)\}$，则$d$是$X$上的一个度量，$(X,d)$为完备度量空间。设$D_i\subset X_i$为闭集，则$D=\prod_{i\in I}D_i$为$X$的闭子集。$D^i=\prod_{j\in I,j\neq i}D_j$中的点表示为$x^i$, $x\in D$可写成$x=(x^i,x_i)\in D^i\times D_i$。对$i\in I$, $f_i:D\times D_i\to Y$为向量值函数。

收稿日期: 2008-06-17. **作者简介**: 成波(1971年12月生)，男，博士，副教授. 研究方向：最优化理论与应用.

***基金项目**: 综合业务网理论与关键技术国家重点实验室基金(1991DA105545).

定理 1　如果 $f_i : D \times D_i \to Y$ 满足：

1)　对每个 $i \in I$ 和任意的 $x = (x^i, x_i) \in D$，有 $f_i(x, x_i) = 0$；

2)　对每个 $i \in I$ 和任意的 $x = (x^i, x_i) \in D$，$z = (z^i, z_i) \in D$，$y_i \in D_i$，有

$$f_i(x, z_i) + f_i(z, y_i) \leq_C f_i(x, y_i);$$

3)　存在 $x^{(0)} \in D$，使得对所有的 $i \in I$，$\xi_e(f_i(x^{(0)}, y_i))$ 有下界，即存在 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得对任意的 $y_i \in D_i$，$\xi_e(f_i(x^{(0)}, y_i)) \geq \alpha$；

4)　对所有的 $i \in I$ 和 $x \in D$，

$$F_i(x) = \{y_i \in D_i : f_i(x, y_i) + d_i(x_i, y_i)e \leq_C 0\}$$

都是闭集。

那么对于任意的 $0 < \epsilon \leq 1$，存在 $\bar{x} = (\bar{x}^i, \bar{x}_i) \in D$，使得

$$f_i(\bar{x}, y_i) + \epsilon d_i(\bar{x}_i, y_i)e \not\leq_C 0, \quad \forall\, y = (y^i, y_i) \in D \setminus \{\bar{x}\}.$$

证明　对每个 $i \in I$ 和任意的 $x = (x^i, x_i) \in D$，$F_i(x)$ 非空 $(x_i \in F_i(x))$。当 $y_i \in F_i(x)$ 时，$F_i(y) \subset F_i(x)$，其中 $y = (y^i, y_i)$。事实上，若 $z_i \in F_i(y)$，则

$$f_i(y, z_i) + d_i(y_i, z_i)e \leq_C 0,$$

而由 $y_i \in F_i(x)$ 得

$$f_i(x, y_i) + d_i(x_i, y_i)e \leq_C 0,$$

结合 2) 和 d_i 为度量就得到

$$f_i(x, z_i) + d_i(x_i, z_i)e \leq_C 0,$$

即 $z_i \in F_i(x)$。

设 $v_i(x) = \inf_{y_i \in F_i(x)} \xi_e(f_i(x, y_i))$，由 3) 可取 $x_i^{(1)} \in F_i(x^{(0)})$，使得

$$\xi_e\big(f_i(x^{(0)}, x_i^{(1)})\big) \leq v_i(x^{(0)}) + 2^{-1}, \quad \forall\, i \in I.$$

令 $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_m^{(1)}) \in D$，由 2) 结合非线性函数 ξ_e 的次可加性和单调递增性，对每个 $i \in I$ 有

$$\xi_e\big(f_i(x^{(0)}, x_i^{(1)})\big) + \xi_e\big(f_i(x^{(1)}, y_i)\big) \geq \xi_e\big(f_i(x^{(0)}, x_i^{(1)}) + f_i(x^{(1)}, y_i)\big) \geq \xi_e\big(f_i(x^{(0)}, y_i)\big),$$

再由下确界的定义和 $F_i(x^{(1)}) \subset F_i(x^{(0)})$，得

$$\begin{aligned} v_i\big(x^{(1)}\big) &= \inf_{y_i \in F_i(x^{(1)})} \xi_e\big(f_i(x^{(1)}, y_i)\big) \geq \inf_{y_i \in F_i(x^{(0)})} \xi_e\big(f_i(x^{(1)}, y_i)\big) \\ &\geq \inf_{y_i \in F_i(x^{(0)})} \xi_e\big(f_i(x^{(0)}, y_i)\big) - \xi_e\big(f(x^{(0)}, x_i^{(1)})\big) \geq -2^{-1}. \end{aligned}$$

再取 $x_i^{(2)} \in F_i(x^{(1)})$，使得

$$\xi_e\big(f_i(x^{(1)}, x_i^{(2)})\big) \leq v_i(x^{(1)}) + 2^{-2}, \quad \forall\, i \in I,$$

令 $x^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_m^{(2)})\in D$，同样可得 $v_i(x^{(2)})\ge -2^{-2}$。继续此过程，就得到了 D 中的一个序列 $\{x^{(n)}\}$，使得对每个 $i\in I$ 和 $n=0,1,2,\cdots$，有

$$x_i^{(n+1)}\in F_i\big(x^{(n)}\big),\quad v_i\big(x^{(n+1)}\big)\ge -2^{-n-1},$$

$$\xi_e\big(f_i(x^{(n)},x_i^{(n+1)})\big)\le v_i\big(x^{(n)}\big)+2^{-n-1},\quad \forall\, i\in I,$$

进一步

$$\mathrm{diam}F_i(x^{(n)})\le 2^{-n+1}\to 0(n\to\infty),\quad \forall\, i\in I.$$

事实上，任取 $z_i\in F_i(x^{(n)})$，则存在 $c_1\in C$，使得

$$-d_i\big(x_i^{(n)},z_i\big)e=f_i\big(x_i^{(n)},z_i\big)+c_1,$$

结合 ξ_e 的性质得到

$$-d_i\big(x_i^{(n)},z_i\big)=\xi_e\big(f_i(x_i^{(n)},z_i)+c_1\big)\ge\xi_e\big(f_i(x_i^{(n)},z_i)\big)\ge v_i\big(x^{(n)}\big),$$

从而对任意 x_i, $y_i\in F_i(x^{(n)})$，有

$$d_i(x_i,y_i)\le d_i\big(x_i,x_i^{(n)}\big)+d_i\big(x_i^{(n)},y_i\big)\le -2v_i\big(x_n\big)\le -2^{-n+1}.$$

对任何 $x\in D$，定义 $F(x)=F_1(x)\times F_2(x)\times\cdots\times F_m(x)$，由 4) 容易证明 $F(x)$ 是非空闭集，而且当 $y\in F(x)$ 时 $F(y)\subset F(x)$。因此每个 n 都有 $F(x^{n+1})\subset F(x^n)$。另外，若 y, $z\in F(x)$，则

$$d(y,z)=\max_{i\in I}d_i(y_i,z_i)\le\max_{i\in I}\mathrm{diam}\big(F_i(x^{(n)})\big)\to 0\ (n\to\infty),$$

故 $\mathrm{diam}(F(x^{(n)}))\to 0(n\to\infty)$。所以由引理 1 可知 $\bigcap_{n=0}^{\infty}F(x_n)$ 为单点集 $\{\bar{x}\}$。进一步还可以得到 $\{\bar{x}\}=F(\bar{x})$。事实上，由于对每个 n 都有 $\bar{x}\in F(x^{(n)})$，所以 $F(\bar{x})\subset\bigcap_{n=0}^{\infty}F(x_n)=\{\bar{x}\}$。

对任意 $x\in D$，设

$$F_i^{\epsilon}(x)=\big\{y_i\in D_i: f_i(x,y_i)+\epsilon d_i(x_i,y_i)e\le_C 0\big\},$$

则同样可以得到:

(a) 当 $y=(y^i,y_i)\in D$ 且 $y_i\in F_i^{\epsilon}(x)$ 时，$F_i^{\epsilon}(y)\subset F_i^{\epsilon}(x)$;

(b) $\mathrm{diam}(F_i^{\epsilon}(x^{(n)}))\le\epsilon^{-1}2^{-n+1}\to 0(n\to\infty)$;

(c) $F_i^{\epsilon}(x^{(n)})$ 非空 (因 $x_i\in F_i^{\epsilon}(x^{(n)})$)。

另外，若 $0<\epsilon\le 1$，可以得到 $F_i(x)\subset F_i^{\epsilon}(x^{(n)})$。事实上，若 $y_i\in F_i(x)$，则有

$$f_i(x,y_i)+\epsilon d_i(x_i,y_i)e\le_C f_i(x,y_i)+d_i(x_i,y_i)e\le_C 0.$$

因此，若设 $F^{\epsilon}(x)=F_1^{\epsilon}(x)\times F_2^{\epsilon}(x)\times\cdots\times F_m^{\epsilon}(x)$，则有 $F(x)\subset F^{\epsilon}(x)$。从而有

$$\{\bar{x}\}=\bigcap_{n=0}^{\infty}F\big(x^{(n)}\big)\subset\bigcap_{n=0}^{\infty}F^{\epsilon}\big(x^{(n)}\big).$$

假设又有 $z\in\bigcap_{n=0}^{\infty}F^{\epsilon}(x^{(n)})$，则由 (b) 有

$$d(\bar{x},z)=\max_{i\in I}d_i(\bar{x}_i,z_i)\le\max_{i\in I}\mathrm{diam}\big(F_i^{\epsilon}(x^{(n)})\big)\le\epsilon^{-1}2^{-n+1}\to 0\ (n\to\infty),$$

即 $\bar{x} = z$，因此 $\bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\epsilon}(x^{(n)}) = \{\bar{x}\}$。由 (a)，可以得到 $F^{\epsilon}(\bar{x}) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} F^{\epsilon}(x^{(n)})$，再由 (c) 就得到了 $F^{\epsilon}(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$，于是对每个 $i \in I$ 有 $F_i^{\epsilon}(\bar{x}) = \{\bar{x}_i\}$。所以当 $y_i \in D_i$ 且 $y_i \neq \bar{x}_i$，就有 $y_i \notin F_i^{\epsilon}(\bar{x})$，即

$$f_i(\bar{x}, y_i) + \epsilon d_i(\bar{x}_i, y_i)e \not\leq_C 0.$$

当 I 为单点集时，定理1和文献[5]中的定理1有相似的结论，但它和文献[5]中的定理1不同的是：首先定理1中条件3)弱于文献[5]中定理1的条件(ii)；其次，若文献[5]中定理1的条件(iv)成立，则这里的条件4)也必成立，即条件4)是文献[5]中定理1的条件(iv)的一个推论。

2　向量均衡系统解的存在性

设 I, X_i, D_i, X, D, Y 和 C 如上所述，$f_i : D \times D_i \to Y$ 为向量值函数，向量均衡系统(SVEP)就是：找到 $\bar{x} \in D$，使得

$$f_i(\bar{x}, y_i) \notin -\operatorname{int} C, \quad \forall\, y_i \in D_i, \quad i \in I. \tag{1}$$

研究(1)的解的存在性时，因函数 f_i 定义在度量空间上，故不必考虑其凸性和单调性。

定义1　设 $e \in \operatorname{int} C$, $f_i : D \times D_i \to Y$, $\epsilon > 0$。若 $x_\epsilon = (x_\epsilon^i, x_{\epsilon i}) \in D$ 满足：对每个 $i \in I$，

$$f_i(x_\epsilon, y_i) + \epsilon d_i(x_{\epsilon i}, y_i)e \notin -\operatorname{int} C, \quad \forall\, y_i \in D_i \quad 且 \quad y_i \neq x_{\epsilon i},$$

则称 x_ϵ 为向量均衡系统(1)沿方向 e 的 ϵ-向量均衡点。

定理2　设 $D_i \subset X_i$ 是紧集，若 $f_i : D \times D_i \to Y$ 满足定理1的条件1)-4)，并且还满足：

5)　对每个 $i \in I$ 和任意的 $y_i \in D_i$，$f_i(\cdot, y_i)$ 在 D 上上半连续。

则向量均衡系统(1)的解集非空。

证明　若 f_i 满足定理1的条件1)-4)，根据定理1可知：对任何正整数 n，都存在向量均衡系统(1)沿方向 e 的 $1/n$-向量均衡点 $x^{(n)}$ 使得对每个 $i \in I$

$$f_i\big(x^{(n)}, y_i\big) + \Big(\frac{1}{n}\Big) d_i\big(x_i^{(n)}, y_i\big)e \not\leq_C 0, \quad \forall\, y_i \in D_i \quad 且 \quad y_i \neq x_i^{(n)}. \tag{2}$$

因 $D_i \subset X_i$ 是紧集，从而 D 也是 X 的紧子集，故 $\{x^{(n)}\} \subset D$ 有收敛子列，不妨设 $x^{(n)} \to \bar{x} \in D\ (n \to \infty)$。下面证明 $\bar{x}$ 是(1)的解。

假设 $\bar{x}$ 不是(1)的解，那么存在 $k \in I$ 和 $\bar{y}_k \in D_k$ 使得 $f_k(\bar{x}, \bar{y}_k) \in -\operatorname{int} C$，因而存在 $f_k(\bar{x}, \bar{y}_k)$ 的邻域 V 使得 $V \subset -\operatorname{int} C$，由5)及 $x^{(n)} \to \bar{x}$ 可知存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时 $f_k(x^{(n)}, \bar{y}_k) \in -\operatorname{int} C$，因此当 n 充分大时，有

$$f_k\big(x^{(n)}, y_k\big) + (1/n) d_k\big(x_k^{(n)}, y_k\big)e \in -\operatorname{int} C,$$

这和(2)矛盾！

定理2中假设 D 是紧集，如果 D 为非紧集，只要附加强制性条件[10]就可以证明(1)的解集非空。显然，定理2不要求定义域为凸集，另外也不要求函数具有凸性或单调性。

如果指标集 $i \in I$ 是单点集，则向量均衡系统问题(1)就退化为一个向量均衡问题。设 D 为完备度量空间 X 的一个子集，$f : D \times D \to Y$，向量均衡问题就是：找到 $\bar{x}$，使得

$$f(\bar{x}, y) \notin -\operatorname{int} C, \quad \forall\, y \in D. \tag{3}$$

推论1 设 D 是 X 的紧子集，$e \in \operatorname{int} C$，如果向量值函数 $f: D \times D \to Y$ 满足：

1) 对每个 $x \in D$，有 $f(x,x) = 0$;
2) 对任何 $x,y,z \in D$，有 $f(x,y) \leq_C f(x,z) + f(z,y)$;
3) 存在 $x_0 \in D$，使得 $\xi_e(f(x_0,y))$ 有下界;
4) 对每个 $x \in X$，$F(x) = \{y \in D : f(x,y) + d(x,y)e \leq_C 0\}$ 是闭集;
5) 对每个 $y \in D$，$f(\cdot,y)$ 在 D 上半连续。

则向量均衡问题 (3) 的解集非空。

参考文献:

[1] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Math Student, 1994, 63: 123-145

[2] Ansari Q H, Yao J C. An existence result for the generalized vector equilibrium problem[J]. Applied Mathematics Letters, 1999, 12: 53-56

[3] 曾六川. 广义集值强非线性混合似变分不等式解的存在性与算法[J]. 工程数学学报，2006, 23(2): 324-332
Zeng L C. Existence and algorithm of solutions for generalized set-valued strongly nonlinear mixed variational-like inequalities[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(2): 324-332

[4] Ansari Q H, Schaible S, Yao J C. System of vector equilibrium problems and its applications[J]. Journal Optimization Theory and Application, 2000, 107: 547-557

[5] Bianchi M, Kassay G, Pini R. Ekeland's principle for vector equilibrium problems[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66: 1454-1464

[6] Ansari Q H. Vectorial form of ekeland-type variational principle with applications to vector equilibrium problems and fixed point theory[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 334: 561-575

[7] Rudin W. 数学分析原理[M]. 北京：机械工业出版社，2004
Rudin W. Principles of Mathematical Analysis[M]. Beijing: China Machine Press, 2004

[8] Gerth C, Weidner P. Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1990, 67: 297-320

[9] Chen G Y, Yang X Q, Yu H. A nonlinear scalarization function and generalized quasi-vector equilibrium problems[J]. Journal of Global Optimization, 2005, 32: 451-466

[10] Bianchi M, Pini R. Coercivity conditions for equilibrium problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005, 124: 79-92

Existence for System of Vector Equilibriums via Ekeland's Principle

CHENG Bo[1,2], LIU San-yang[1]

(1- School of Science, Xidian University, Xi'an 710071;
2- Department of Mathematics, Ankang University, Ankang 725000)

Abstract: This paper studies the existence of solutions for the system of vector equilibrium problem on metric spaces. By using the nonlinear scalarilization method, vector optimization problems are transformed into scalar optimization problems. Sequentially, the Ekeland's variational principle is generalized to the vector form Ekeland's variational principle. Using the vector form Ekeland's variational principle, we establish an existence theorem for the system of vector equilibrium problem. Our results show that, if the function satisfies the vector form Ekeland's variational and the upper semi-continuity assumption, then the set of solutions for the system of vector equilibrium problem is nonempty.

Keywords: vector equilibrium problems; system of vector equilibrium problems; Ekeland's variational principle; approximate solution

Received: 17 June 2008. **Accepted:** 07 Sep 2009.

Foundation item: The Fund for the State Key Lab on Theory and Chief Technology of Integrated Services Networks (1991DA105545).